

128

428 (ICN)

2015

गणित

**MATHEMATICS**

समय : 3 घण्टे ]

[ पूर्णांक : 100

Time : 3 hours]

[ Max. Marks : 100

- निर्देश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।  
(ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन भागों 'अ' 'ब' तथा 'स' में विभक्त हैं। भाग-'अ' में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है, भाग-'ब' में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है तथा भाग-'स' में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।  
(iii) भाग-'अ' के प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक शब्द या एक वाक्य या आवश्यकतानुसार ही दें।  
(iv) प्रश्नपत्र में कोई समग्र व्यापक विकल्प नहीं है, तथापि 4 अंकों वाले चार प्रश्नों तथा 6 अंकों वाले दो प्रश्नों के आंतरिक विकल्प दिये गये हैं। ऐसे विकल्प वाले प्रश्नों के केवल एक विकल्प का ही उत्तर दीजिए।  
(v) कैलकुलेटर का प्रयोग वर्जित है। यदि आवश्यक हो तो लघुगणक तालिका का प्रयोग किया जा सकता है।  
(vi) प्रथम प्रश्न से प्रारम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए, जो प्रश्न न आता हो उस पर समय नष्ट न कीजिए।

- Note** : (i) All questions are compulsory.  
(ii) The paper consists of 29 questions divided into three sections 'A', 'B' and 'C'. Section-'A' contains 10 questions of 1 mark each; Section 'B' contains 12 questions of 4 marks each and Section-'C' contains 7 questions of 6 marks each.  
(iii) All questions in Section-'A' are to be answered in one word or one sentence or as per the exact requirements of the questions.  
(iv) There is no overall choice. However, internal choices have been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.  
(v) Use of calculator is not permitted. Logarithmic tables may be used, if required.  
(vi) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question, if you can not solve it.

1. यदि फलन  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  क्रमशः  $f(x) = \sqrt{x}$  एवं  $g(x) = x^2$  से परिभाषित हैं तो  $\text{gof}(x)$  ज्ञात कीजिए। 1  
If functions  $f: A \rightarrow B$  and  $g: B \rightarrow C$  are defined by  $f(x) = \sqrt{x}$  and  $g(x) = x^2$  respectively, find  $\text{gof}(x)$ .
2.  $\text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x$  का मान लिखिये, जहाँ  $|x| \geq 1$  1  
Write down the value of  $\text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x$ , where  $|x| \geq 1$
3. उस वर्ग आव्यूह  $A=[a_{ij}]$  का नाम बताइये जिसमें  $a_{ij} = 0$  जब  $i \neq j$  हो। 1  
Name the square matrix  $A=[a_{ij}]$  in which  $a_{ij} = 0, i \neq j$ .
4. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  और  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , तो  $AB$  का मान बताइये। 1  
If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , then evaluate  $AB$ .
5. सारणिक  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$  का मान बताइये। 1  
Evaluate the determinant  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ .
6. फलन  $\frac{2x}{1+x^2}$  का समाकलन कीजिए। 1  
Integrate the function  $\frac{2x}{1+x^2}$ .
7.  $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 1  
Evaluate  $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$ .
8. यदि  $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  तो  $|\vec{a}|$  का मान ज्ञात कीजिए। 1  
If  $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ , then evaluate  $|\vec{a}|$ .

9. सदिश  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  तथा  $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

Find the angle between the vectors  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  and  $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ .

10. एक रेखा के दिक्-अनुपात  $2, -1, -2$  हैं। इसकी दिक्-कोज्याएं ज्ञात कीजिए। 1

A line has direction-ratios  $2, -1, -2$ . Find its direction-cosines.

**भाग - 'ब'**  
**(SECTION - 'B')**

11. एक ही तल में स्थित समस्त सीधी रेखाओं के समुच्चय  $L$  में संबंध  $R, R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ समान्तर है } L_2 \text{ के}\}$  द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता संबंध है। 4

In a set  $L$  of all straight lines lying in a single plane, a relation  $R$  is defined by  $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ is parallel to } L_2\}$ . Prove that  $R$  is an equivalence relation.

**अथवा (OR)**

पूर्णाकों के समुच्चय में  $a * b = a + b + 1$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया  $*$  के लिए तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

Find the identity element for the binary operation  $*$  defined by  $a * b = a + b + 1$  in the set of integers.

12. सिद्ध कीजिए कि  $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1}x$ , जहाँ  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ . 4

Prove that  $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1}x$ , where  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ .

13. सिद्ध कीजिए :  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ . 4

Prove that :

14. बिन्दु  $x = 3$  पर फलन  $f(x) = 2x^2 - 5$  के सातत्य का परीक्षण कीजिए। 4

Examine the function  $f(x) = 2x^2 - 5$  for its continuity at the point  $x = 3$ .

**अथवा (OR)**

सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर अवकलनीय फलन उस बिन्दु पर संतत होता है।

Prove that a function differentiable at some point is continuous at that point.

15. अंतराल  $[1, 2]$  में फलन  $f(x) = 2x^2 - 1$  के लिए माध्यमान प्रमेय का 'c' ज्ञात कीजिए। 4

In the interval  $[1, 2]$ , find 'c' of mean value theorem for the function  $f(x) = 2x^2 - 1$ .

16. एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 सेमी/सेकंड की दर से परिवर्तित हो रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से परिवर्तित हो रहा है, जब त्रिज्या 10 सेमी है। 4

The radius of a circle is changing uniformly at the rate of 3 cm/sec. Find the rate of change of its area when its radius is 10 cm.

17. फलन  $x \log x$  का  $x$  के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

4

Integrate the function  $x \log x$  with respect to  $x$ .

अथवा (OR)

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ .

18. अवकल समीकरण  $y \log y dx - x dy = 0$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

4

Find the general solution of the differential equation  $y \log y dx - x dy = 0$ .

19. अवकल समीकरण  $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$  का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि  $y = \frac{1}{4}$  यदि  $x = 1$

4

Find the particular solution of the differential equation  $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ , given that  $y = \frac{1}{4}$  when  $x = 1$ .

20. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  और  $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  द्वारा दी गई हैं।

4

Find the area of parallelogram whose adjacent sides are given by the vectors  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  and  $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ .

21. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों  $x + y + z = 6$  और  $2x + 3y + 4z + 5 = 0$  के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु  $(1, 1, 1)$  से होकर जाता है।

4

Find the equation of a plane passing through the intersection of the planes  $x + y + z = 6$  and  $2x + 3y + 4z + 5 = 0$  and the point  $(1, 1, 1)$ .

22. एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में कम से कम एक लड़की है, तो दोनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4

A family has two children. If it is known that atleast one of the children is a girl, then find the probability that both of the children are girls.

अथवा (OR)

सिद्ध कीजिए कि यदि E और F दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो E और  $F^c$  भी स्वतंत्र होंगी।

Prove that if E and F are two independent events, then E and  $F^c$  are also independent.

भाग - 'स'  
(SECTION - 'C')

23. प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए - 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

With the help of elementary operations, find the inverse of the following matrix -

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

24. वक्र  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  के बिन्दु, जहाँ  $t = \frac{\pi}{4}$  है, पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए। 6

Find the equations of tangent and normal to the curve  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  at the point where  $t = \frac{\pi}{4}$ .

अथवा (OR)

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के अंतर्गत महत्तम क्षेत्रफल वाला आयत, एक वर्ग होता है। 6

Prove that the rectangle of maximum area, inscribed in a circle, is a square. के

25.  $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x) dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 6 गोग

Evaluate  $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x) dx$ . उस

26. वक्र  $x^2 = 4y$  एवं रेखा  $y = 4$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 6 -'A' each

Find the area bounded by curve  $x^2 = 4y$  and the line  $y = 4$ . r the

27. रेखाओं  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  तथा  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$  के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 6 tions ne of

Find the shortest distance between the lines  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  and  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ . on, if

28. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद पहले थैले से निकाली गई है। 6

A bag contains 4 red and 4 black balls, and another bag contains 2 red and 6 black balls. A ball is drawn at random from one of the bags and that ball is red. Find the probability that the ball is drawn from the first bag.

**अथवा (OR)**

पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

Find the probability distribution of the number of doublets obtained on tossing a pair of dice three times.

29. आलेख द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए –  
निम्नांकित व्यरोधों के अन्तर्गत

$$x + y \leq 50$$

$$3x + y \leq 90$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$Z = 4x + y \text{ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।}$$

6

Solve the following linear programming problem graphically –

$$\text{maximize } Z = 4x + y$$

Subject to the constraints

$$x + y \leq 50$$

$$3x + y \leq 90$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

\*\*\*\*\*